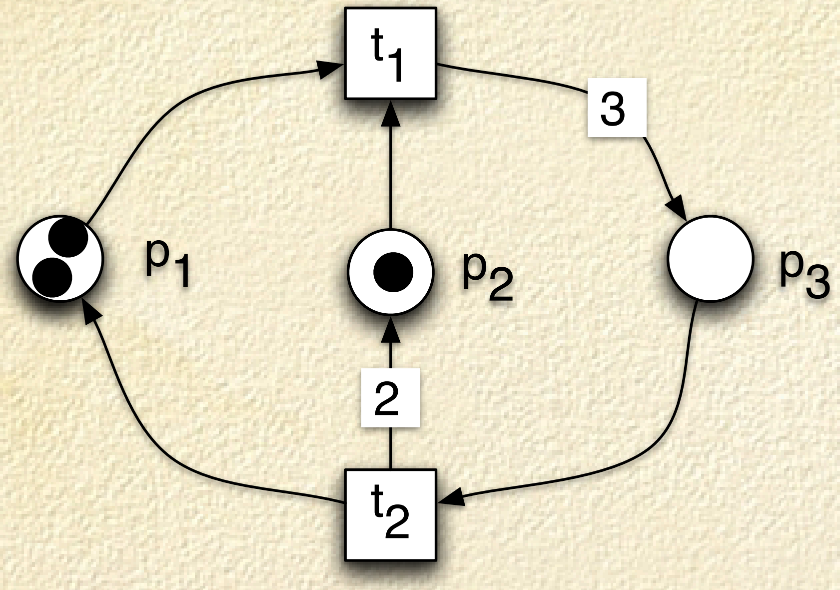
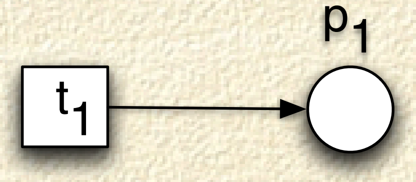
(1) Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann heißt ein Platz $p \in P$ *$k$-beschränkt* ($k$-bounded) in $\mathcal{N}$, falls $\forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N}) : \mathbf{m}(p) \leq k$

(2) $p$ heißt *beschränkt* (bounded) in $\mathcal{N}$, falls $\exists k \in \mathbb{N} \; \forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N}) : \mathbf{m}(p) \leq k$

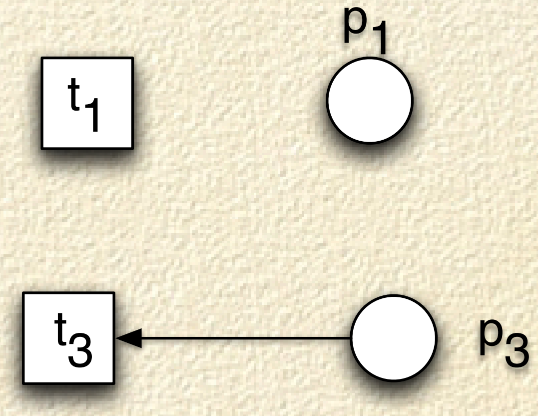
(3) $\mathcal{N}$ heißt $k$-beschränkt bzw. beschränkt, wenn alle Plätze $k$-beschränkt bzw. beschränkt sind.




das “kleinste” unbeschränkte Netz?




das “kleinste” beschränkte Netz?

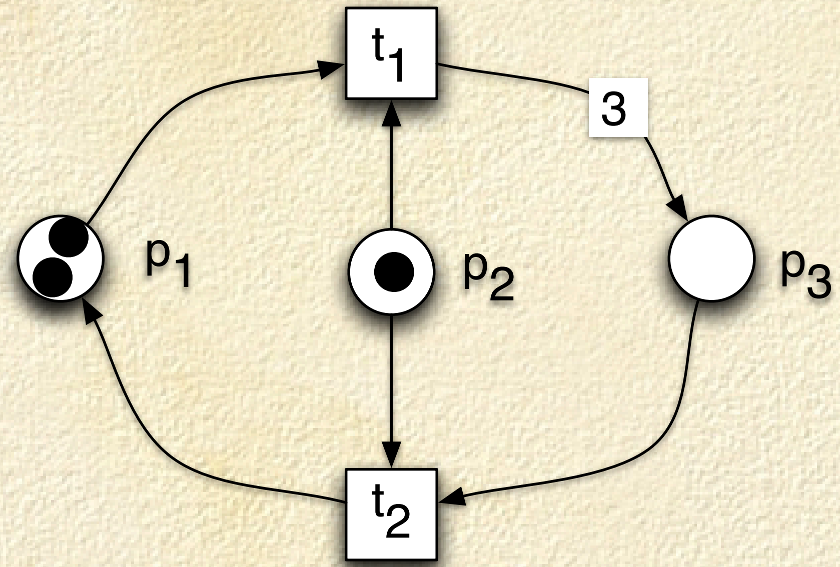


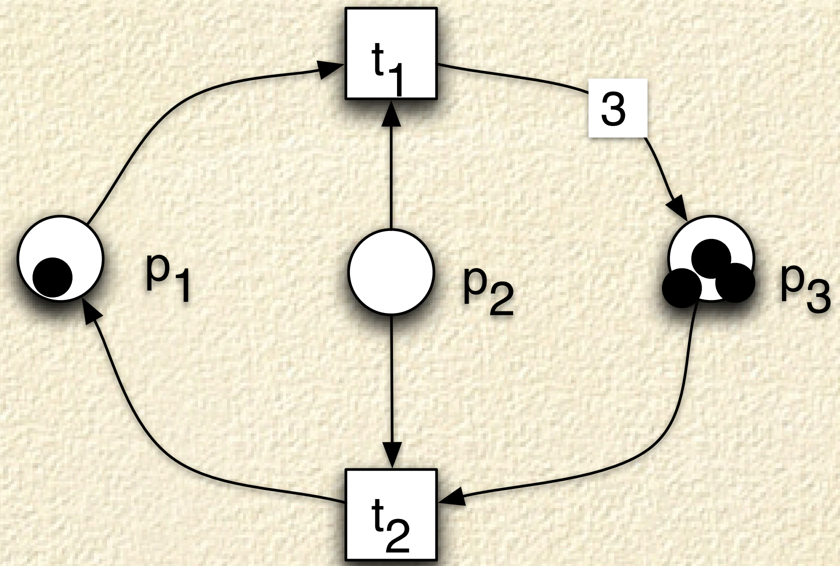

$$\forall p \in P \;\; \exists k \in \mathbb{N} \;\; \forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N}) \; : \mathbf{m}(p) \leq k$$

(4) $\langle \mathcal{N}, \mathbf{m_0} \rangle$ heißt $\boxed{\textit{verklemmungsfrei}}$ (deadlock-free) falls
$\forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N}, \mathbf{m_0}).\ \exists t \in T : \mathbf{m} \xrightarrow{t}$

(5) $t$ heißt *lebendig* (live) in $\langle \mathcal{N}, \mathbf{m_0} \rangle$ falls
$\forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N}, \mathbf{m_0}).\ \exists \sigma \in T^* : \mathbf{m} \xrightarrow{\sigma t} \mathbf{m}'$

(6) $\langle \mathcal{N}, \mathbf{m_0} \rangle$ heißt *lebendig* falls alle Transitionen lebendig sind.



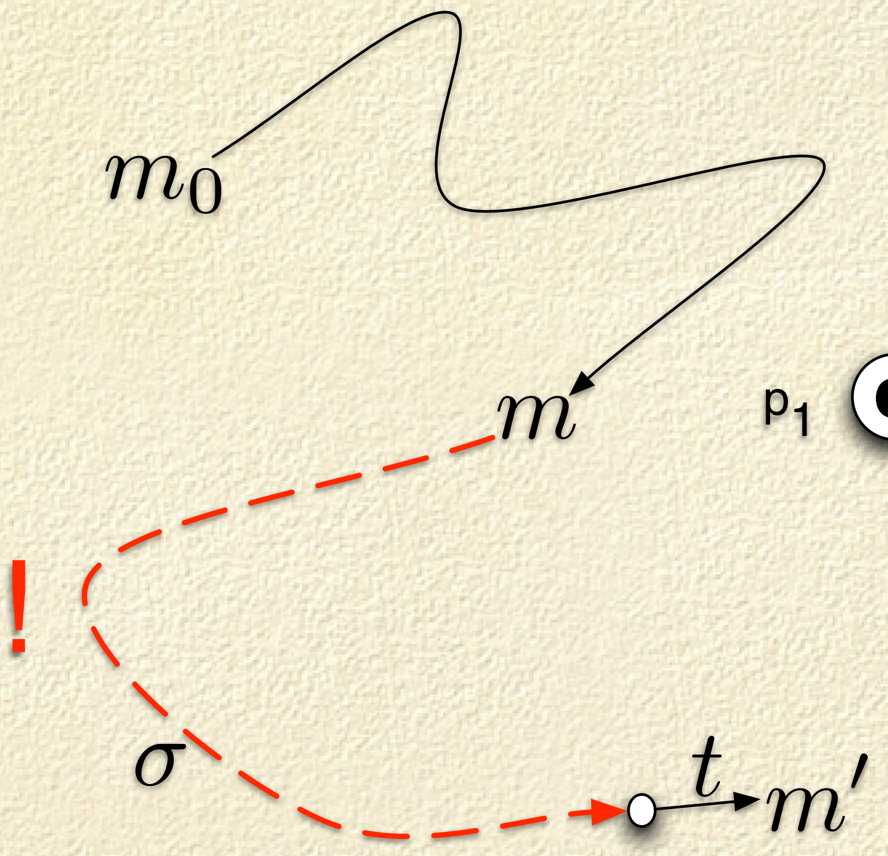
(4) $\langle \mathcal{N}, \mathbf{m_0} \rangle$ heißt *verklemmungsfrei* (deadlock-free) falls

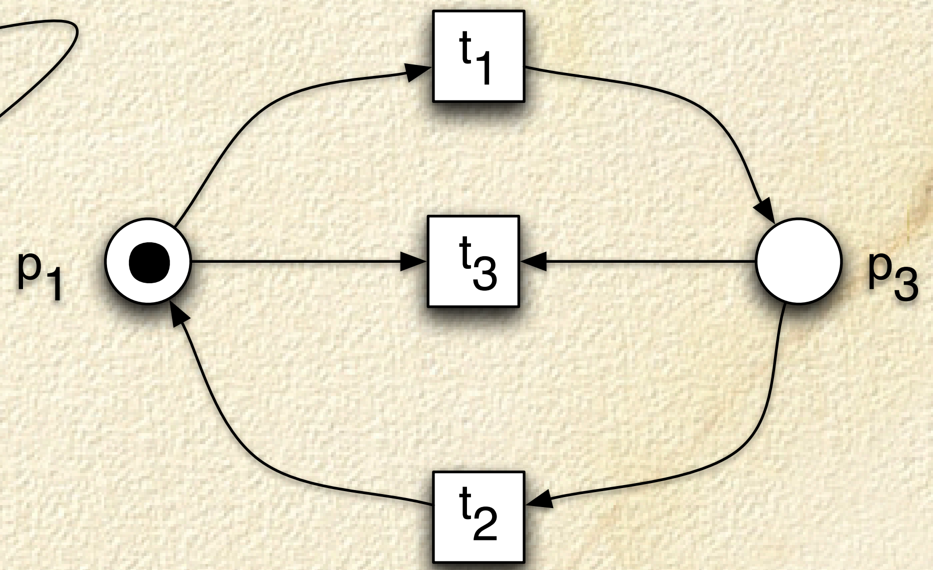
$\forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N}, \mathbf{m_0}).\ \exists t \in T : \mathbf{m} \xrightarrow{t}$

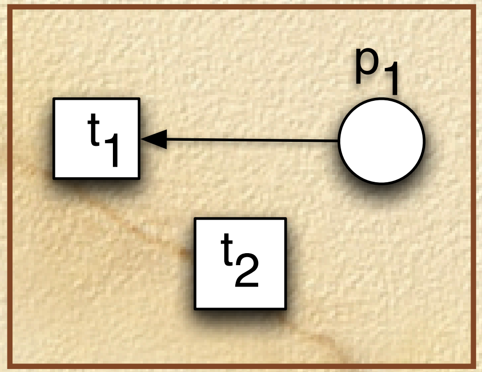
(5) $t$ heißt *lebendig* (live) in $\langle \mathcal{N}, \mathbf{m_0} \rangle$ falls

$\forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N}, \mathbf{m_0}).\ \exists \sigma \in T^* : \mathbf{m} \xrightarrow{\sigma t} \mathbf{m}'$

(6) $\langle \mathcal{N}, \mathbf{m_0} \rangle$ heißt *lebendig* falls alle Transitionen lebendig sind.



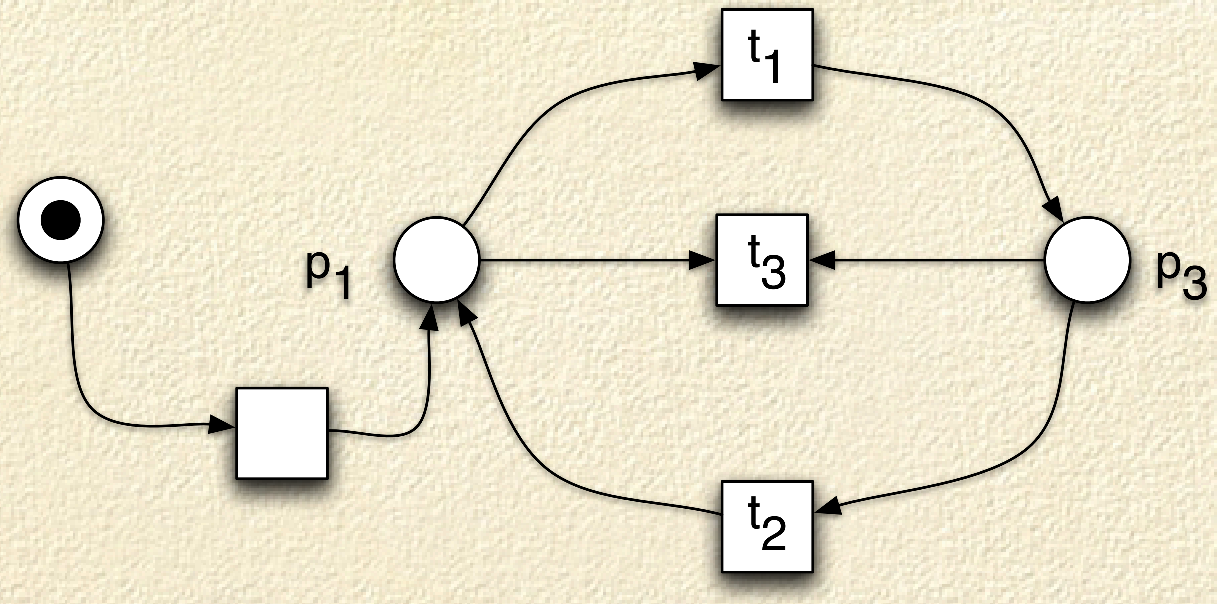




$\neg$*verklemmungsfrei aber nicht lebendig*

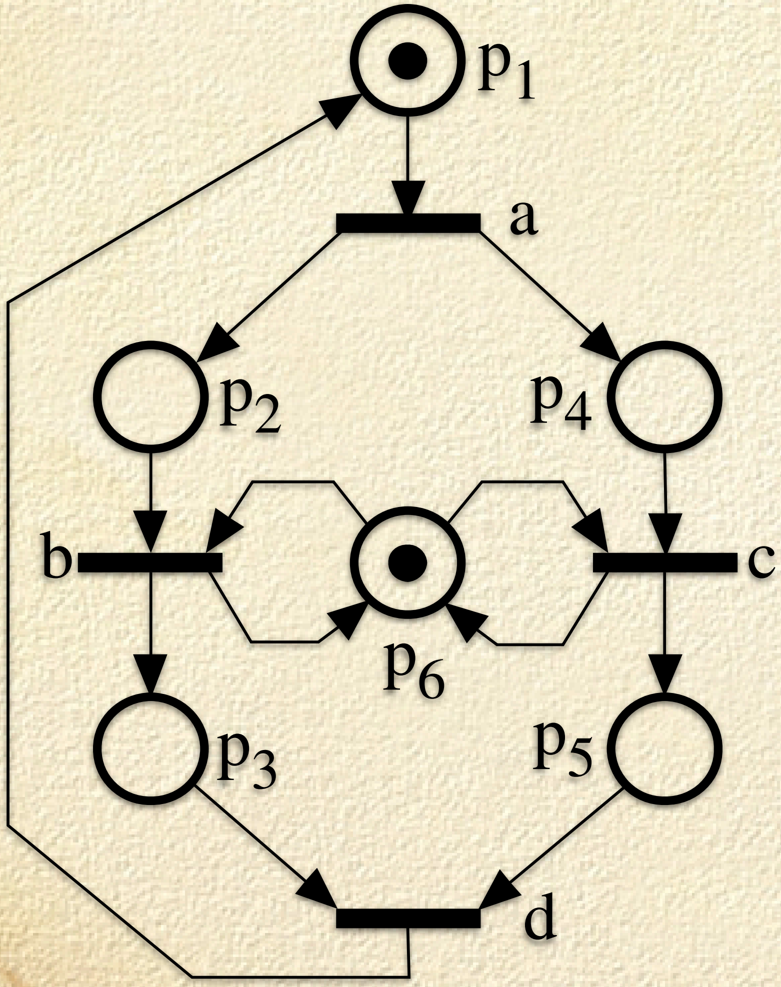
(7) $\mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N}, \mathbf{m_0})$ heißt *Rücksetzzustand* (home state) falls
$\forall \mathbf{m}' \in \mathbf{R}(\mathcal{N}, \mathbf{m_0}).\ \exists \sigma \in T^*\colon \mathbf{m}' \xrightarrow{\sigma} \mathbf{m}$

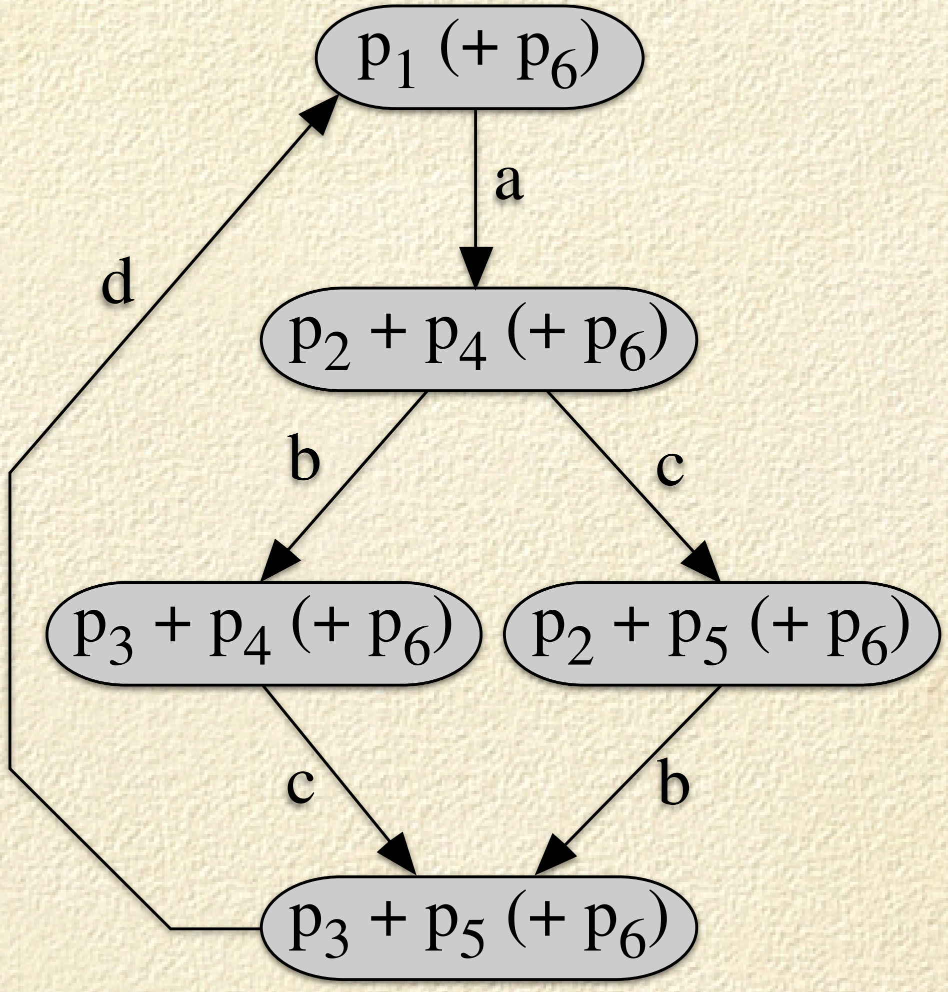
(8) $\langle \mathcal{N}, \mathbf{m_0} \rangle$ heißt *reversibel* (reversible) falls
$\forall \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N}, \mathbf{m_0}).\ \exists \sigma \in T^* : \mathbf{m} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{m_0}$




*Ein Netz ist reversibel, falls* $\mathbf{m_0}$ *ein Rücksetzzustand ist.*

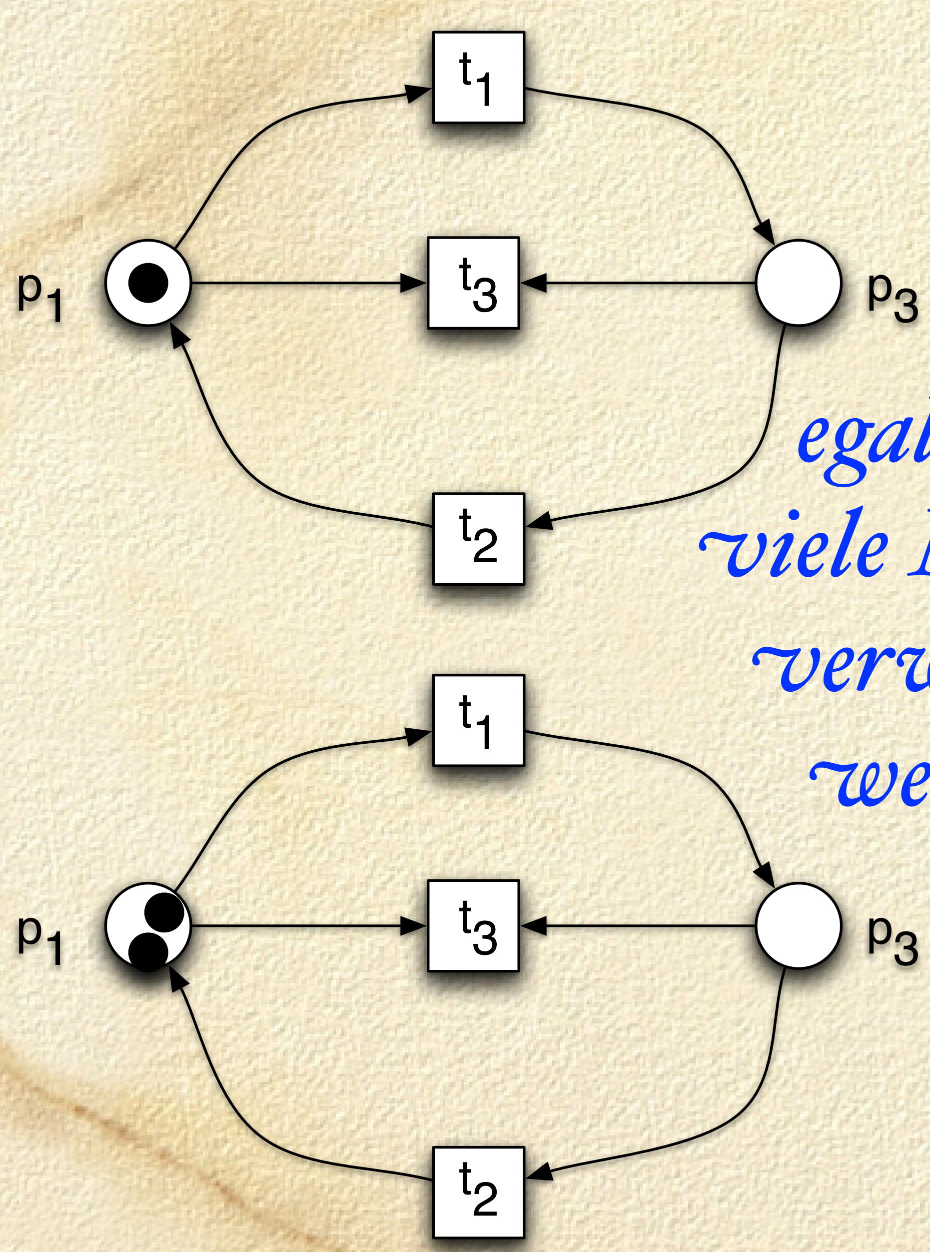
(9) *wechselseitiger Ausschluss* (mutual exclusion) in $\langle \mathcal{N}, \mathbf{m_0} \rangle$:
$p_i$ und $p_j$ sind in *Markierungs-Ausschluss* (marking mutual exclusion) falls
$\nexists \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N}, \mathbf{m_0})$: $(\mathbf{m}[p_i] > 0) \wedge (\mathbf{m}[p_j] > 0)$
$t_i$ und $t_j$ sind in *Schalt-Ausschluss* (firing mutual exclusion) falls
$\nexists \mathbf{m} \in \mathbf{R}(\mathcal{N}, \mathbf{m_0})$ : $\mathbf{m} \geq W(\bullet, t_i) + W(\bullet, t_j)]$



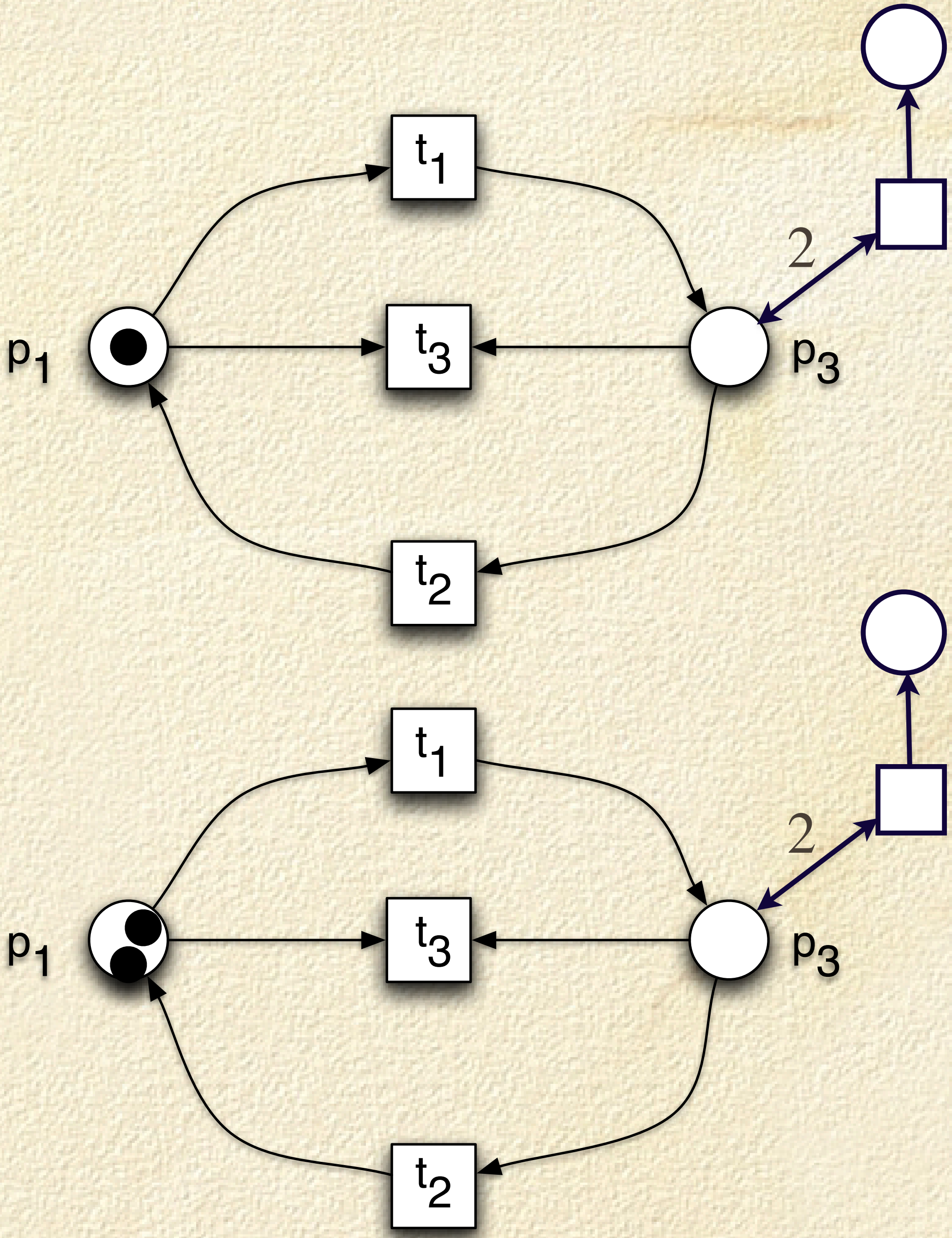
(10) **Strukturelle Eigenschaften :**

$\mathcal{N}$ heißt *strukturell beschränkt* (structurally bounded) falls $\forall \mathbf{m_0}$: $\langle \mathcal{N}, \mathbf{m_0} \rangle$ ist beschränkt




*egal, wie viele Marken verwendet werden*

strukturell beschränkt



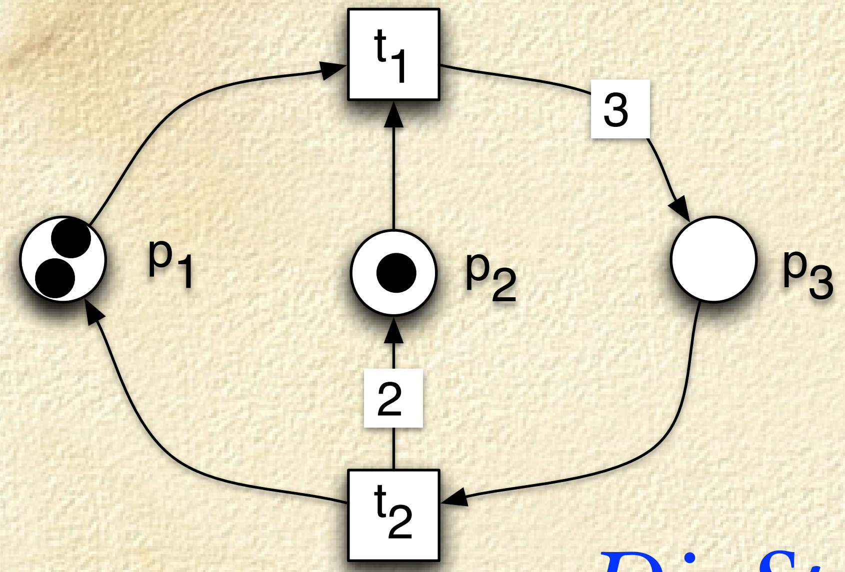

strukturell **nicht** beschränkt

*Die Struktur erzwingt Beschränktheit.*

(10) Strukturelle Eigenschaften :

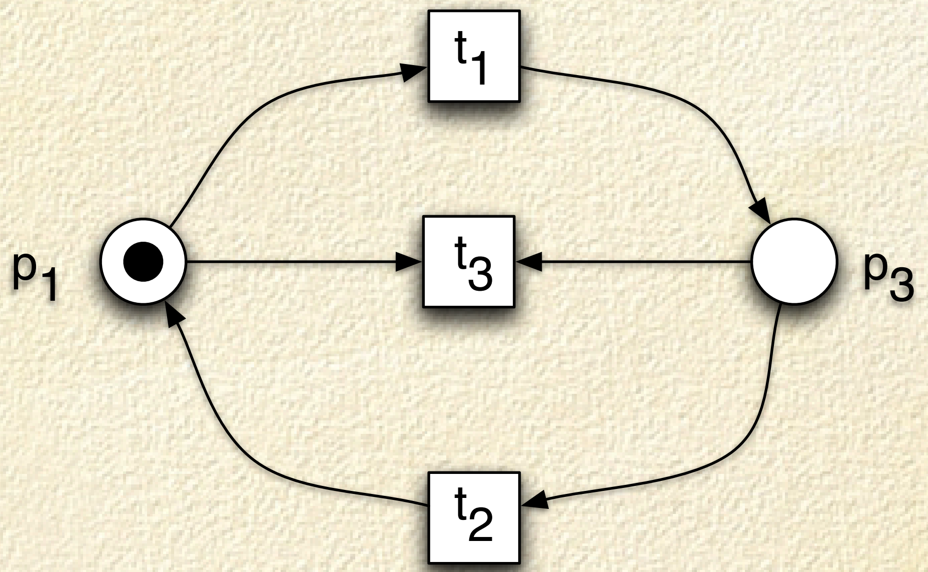
$\mathcal{N}$ heißt *strukturell beschränkt* (structurally bounded) falls $\forall \mathbf{m_0}$: $\langle \mathcal{N}, \mathbf{m_0} \rangle$ ist beschränkt

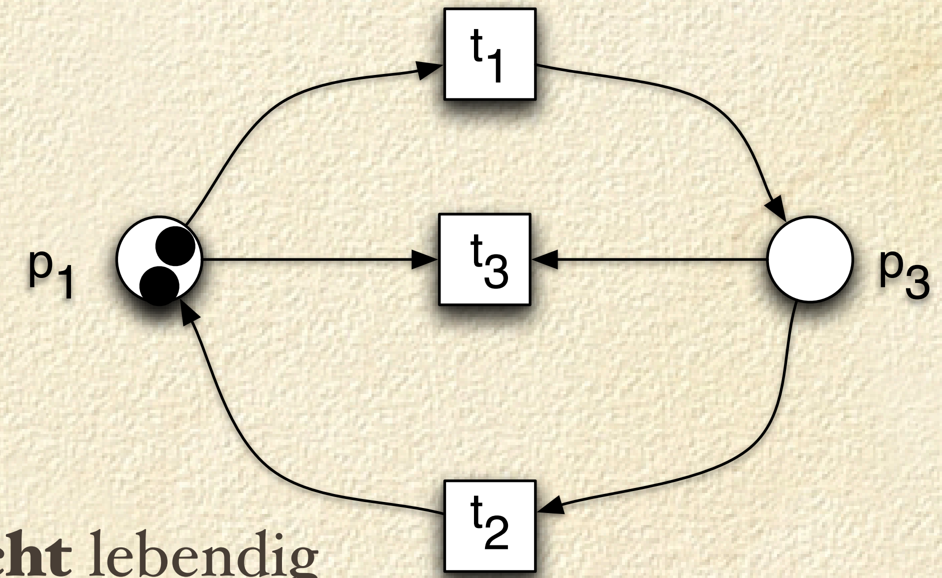
$\mathcal{N}$ heißt *strukturell lebendig* (structurally live) falls $\exists \mathbf{m_0}$ : $\langle \mathcal{N}, \mathbf{m_0} \rangle$ ist lebendig




strukturell lebendig

*Die Struktur erlaubt eine lebendige Anfangsmarkierung.*




strukturell **nicht** lebendig

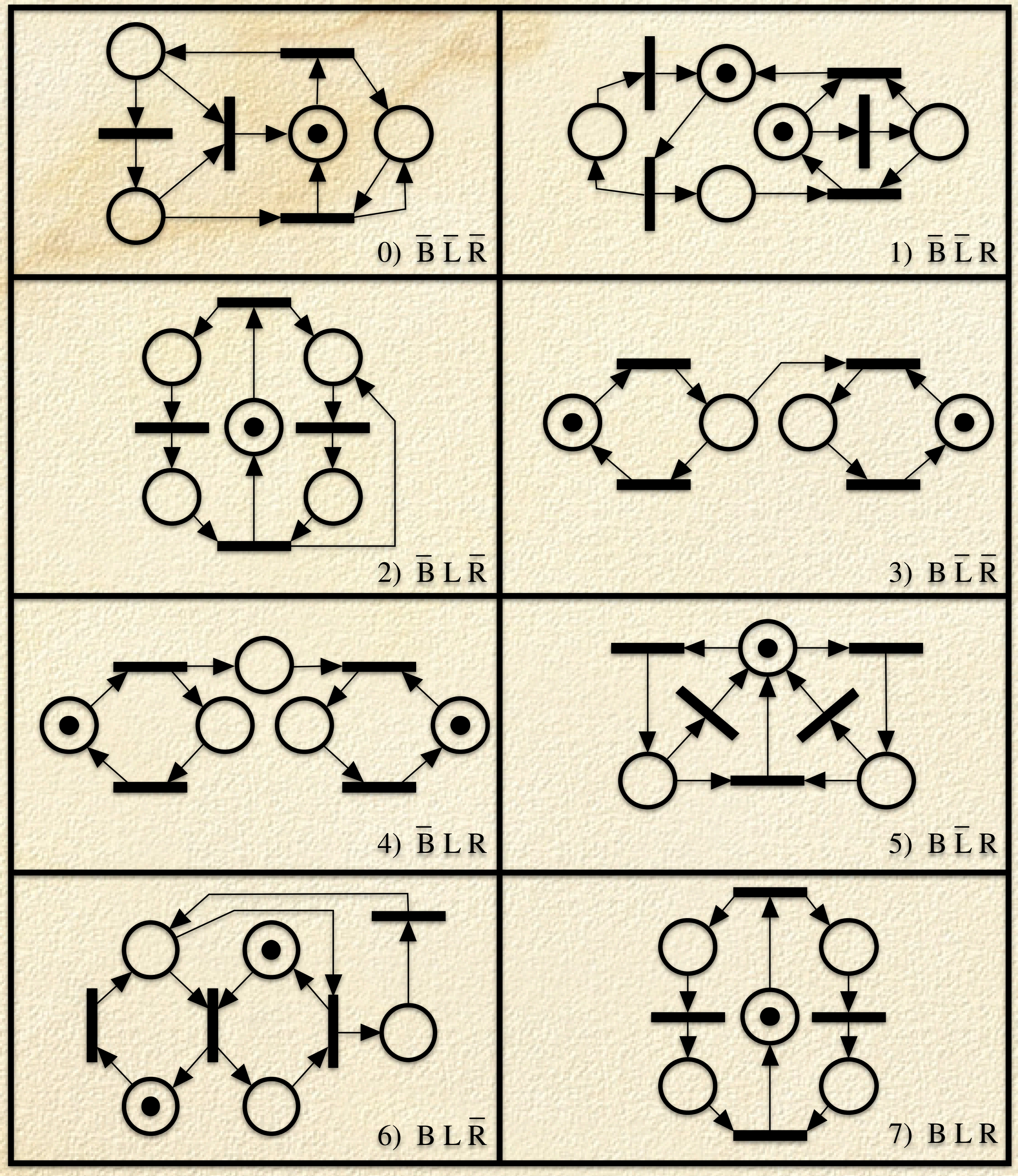


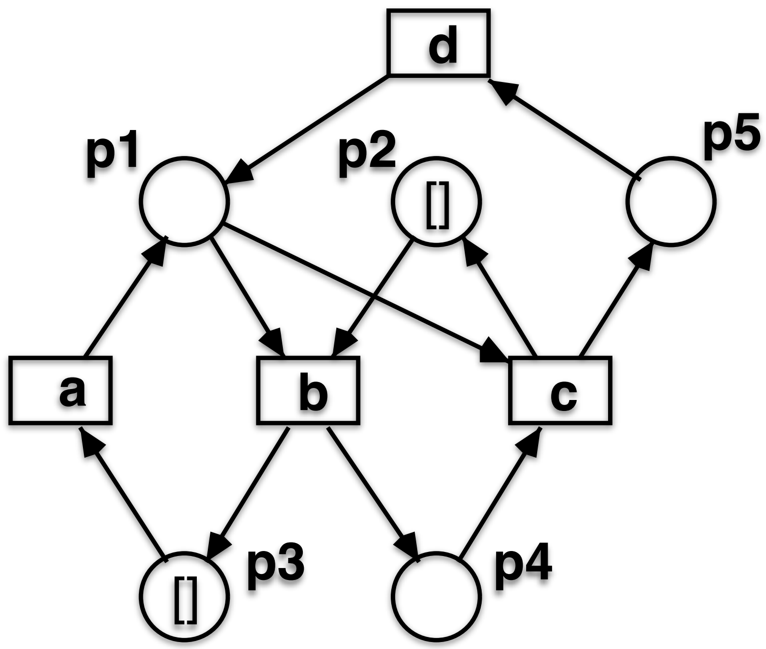

Abbildung 3.4 Beschränktheit (B), Lebendigkeit (L) und Reversibilität (R) sind unabhängige Eigenschaften

**Präsenzaufgabe 7.1:**

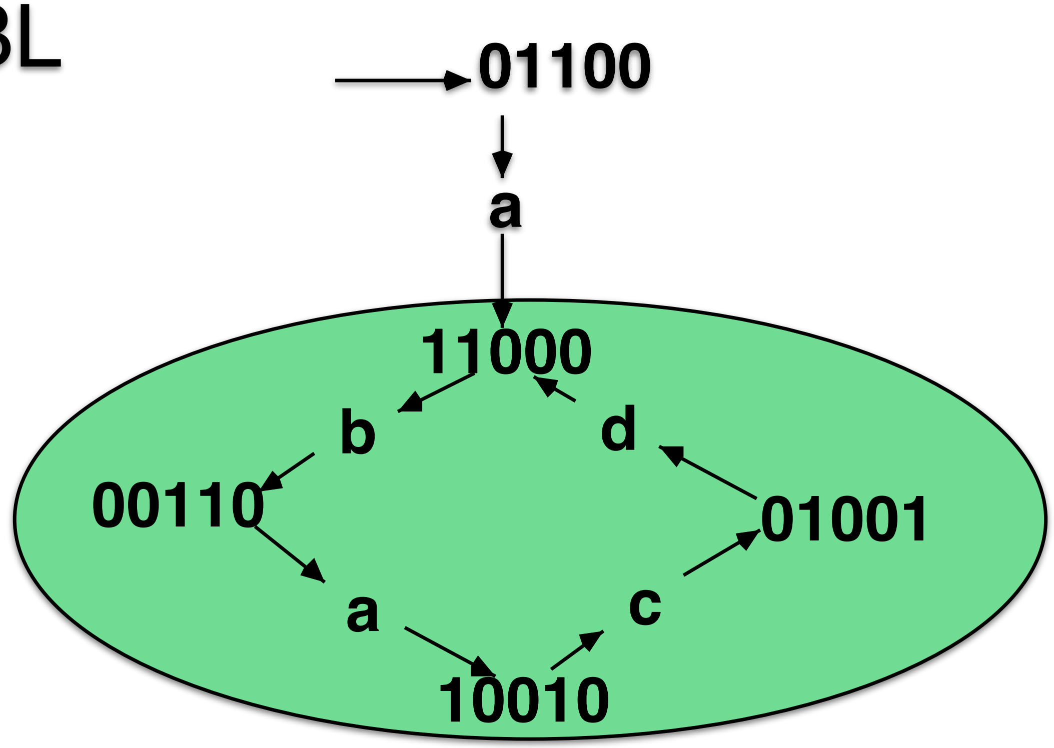
1. Konstruiere den Erreichbarkeitsgraphen nach Algorithmus 3.1 für das folgende Netz.
2. Teste mit einem geeigneten Algorithmus aus Kapitel 3, ob die Initialmarkierung ein Rücksetzzustand ist (Reversibilität). Gib ggf. die SZKs und die terminalen SZKs an.
3. Ist Reversibilität eine Markierungs- oder Lebendigkeitsinvarianz? Gib das dazugehörige Prädikat $\pi(m)$ an!

**Lösung:** Es handelt sich um das $BL\bar{R}$-Beispiel aus dem Skript.

[h=$BL\bar{R}$] Der RG-Graph ist endlich. Die terminale SZK enthält alle Transitionen. Die Initialmarkierung ist von keiner anderen Markierung aus erreichbar, daher ist $N$ nicht reversibel.




h) BL



# Algorithmus 3.1 (Berechnung des Erreichbarkeitsgraphen)

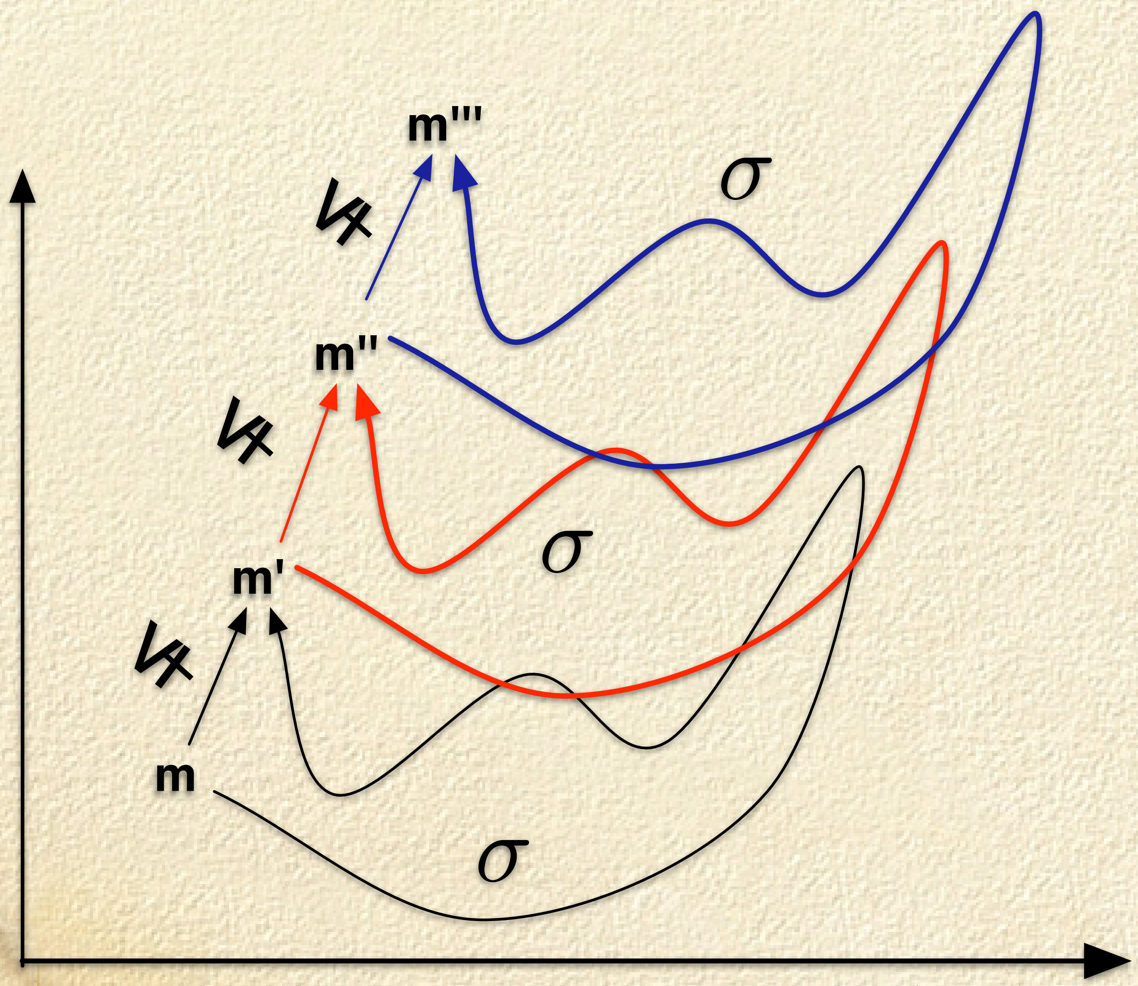
**Input -** Das Netzsystem $\mathcal{S} = \langle \mathcal{N}, \mathbf{m_0} \rangle$
**Output -** Der gerichtete Graph $\mathrm{RG}(\mathcal{S}) = (V, E)$, falls das Netzsystem beschränkt ist.

1. Initialisiere $\mathrm{RG}(\mathcal{S}) = (\{\mathbf{m_0}\}, \emptyset)$; $\mathbf{m_0}$ sei ungefärbt;
2. **while** Es gibt ungefärbte Knoten in $V$. **do**
   - 2.1 Wähle einen ungefärbte Knoten $\mathbf{m} \in V$ und färbe ihn.
   - 2.2 **for** Für jede in $\mathbf{m}$ aktivierte Transition $t$ **do**
     - 2.2.1 Berechne $\mathbf{m}'$ mit $\mathbf{m} \xrightarrow{t} \mathbf{m}'$;
     - 2.2.2 **if** Es gibt einen Knoten $\mathbf{m}'' \in V$ derart, dass $\mathbf{m}'' \xrightarrow{\sigma} \mathbf{m}'$ und $\mathbf{m}'' < \mathbf{m}'$.
       **then** Der Algorithmus terminiert ohne Ergebnis.;
       (Das Netzsystem ist unbeschränkt.)
     - 2.2.3 **if** Es gibt keinen Knoten $\mathbf{m}'' \in V$ derart, dass $\mathbf{m}'' = \mathbf{m}'$
       **then** $V := V \cup \{\mathbf{m}'\}$, wobei $\mathbf{m}'$ ein ungefärbter Knoten sei.
     - 2.2.4 $E := E \cup \{\langle \mathbf{m}, t, \mathbf{m}' \rangle\}$
3. Der Algorithmus terminiert mit Ergebnis. ($\mathrm{RG}(\mathcal{S})$ ist der Erreichbarkeitsgraph.)

Als Abbruchkriterium dient: das System $\mathcal{S} = \langle \mathcal{N}, \mathbf{m_0} \rangle$ ist genau dann unbeschränkt, wenn es zwei erreichbare Markierungen $\mathbf{m}, \mathbf{m}' \in \mathrm{RS}(\mathcal{S})$ gibt, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$\text{a)}\quad \exists \sigma \in T^* : \mathbf{m} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{m}'$$

$$\text{b)}\quad \mathbf{m} \lneqq \mathbf{m}'$$



# Invarianz-Eigenschaften

a) Markierungs-Invarianz

b) Lebendigkeits-Invarianz

Spezifikationssprache durch:

## $Markierungsprädikate\ \Pi$

Alle aussagenlogischen Formeln mit Atomen der Form:

$$\boxed{\sum_{p \in A} k_p \mathbf{m}[p] \le k}$$

wobei $k_p$ und $k$ rationale Konstanten und $A$ eine Teilmenge der Plätze ist.

**Definition 3.2** *Eine* $\boxed{\text{Markierungs-Invarianzeigenschaft}}$ *(marking invariance property)* *eines Netzsystems* $\mathcal{S} = \langle \mathcal{N}, \mathbf{m_0} \rangle$ *ist ein Prädikat der Form* $\forall \mathbf{m} \in \mathrm{RS}(\mathcal{S}) \,.\, \Pi(\mathbf{m})$ *oder* $\forall \mathbf{m} \in \mathrm{RS}(\mathcal{S}) \,.\, \exists t \in T \,.\, \Pi(\mathbf{m})$, *wobei* $\Pi$ *ein Markierungsprädikat ist.*

Beispiele dazu sind:

$$\boxed{\sum_{p \in A} k_p \mathbf{m}[p] \leq k}$$

1) *k-Beschränktheit* ($k$-boundedness) eines Platzes $p$: $\forall \mathbf{m} \in \mathrm{RS}(\mathcal{S}) \,.\, \mathbf{m}[p] \leq k$.

2) *Markierungs-Ausschluss* (marking mutual exclusion) zwischen $p$ und $p'$: $\forall \mathbf{m} \in \mathrm{RS}(\mathcal{S}) \,.\, ((\mathbf{m}[p] = 0) \vee (\mathbf{m}[p'] = 0))$ .

3) *Verklemmungsfreiheit* (deadlock-freeness): $\forall \mathbf{m} \in \mathrm{RS}(\mathcal{S}) \,.\, \exists t \in T \,.\, W(\bullet, t) \leq \mathbf{m}$.

**Algorithmus 2.4 (Entscheiden einer Markierungs-Invarianzeigenschaft)**

**Input -** Der Erreichbarkeitsgraph $\mathrm{RG}(\mathcal{N}, \mathbf{m_0})$. Die Markierungs-Invarianzeigenschaft $\Pi$.
**Output -** TRUE falls die Eigenschaft $\Pi$ erfüllt ist; FALSE falls die Eigenschaft $\Pi$ nicht erfüllt ist.

1. Initialisiere alle Elemente von $\mathrm{RS}(\mathcal{S})$ als ungefärbt.
2. **while** Es gibt einen ungefärbten Knoten $\mathbf{m} \in \mathrm{RS}(\mathcal{S})$ **do**
   2.1 Wähle einen einen ungefärbten Knoten $\mathbf{m} \in \mathrm{RS}(\mathcal{S})$ und färbe ihn.
   2.2 **if** $\mathbf{m}$ erfüllt nicht $\Pi$.
   **then** return FALSE (Die Eigenschaft $\Pi$ ist nicht erfüllt.)
3. Return TRUE

**Definition 3.4** *Eine* Lebendigkeits-Invarianzeigenschaft *(liveness invariance property)* *eines Netzsystems* $\mathcal{S} = \langle \mathcal{N}, \mathbf{m_0} \rangle$ *ist ein Prädikat der Form* $\forall \mathbf{m} \in \mathrm{RS}(\mathcal{S}) \,.\, \exists \mathbf{m}' \in \mathrm{RS}(\mathcal{N}, \mathbf{m}) \,.\, \Pi(\mathbf{m}')$, *wobei* $\Pi$ *ein Markierungsprädikat ist.*

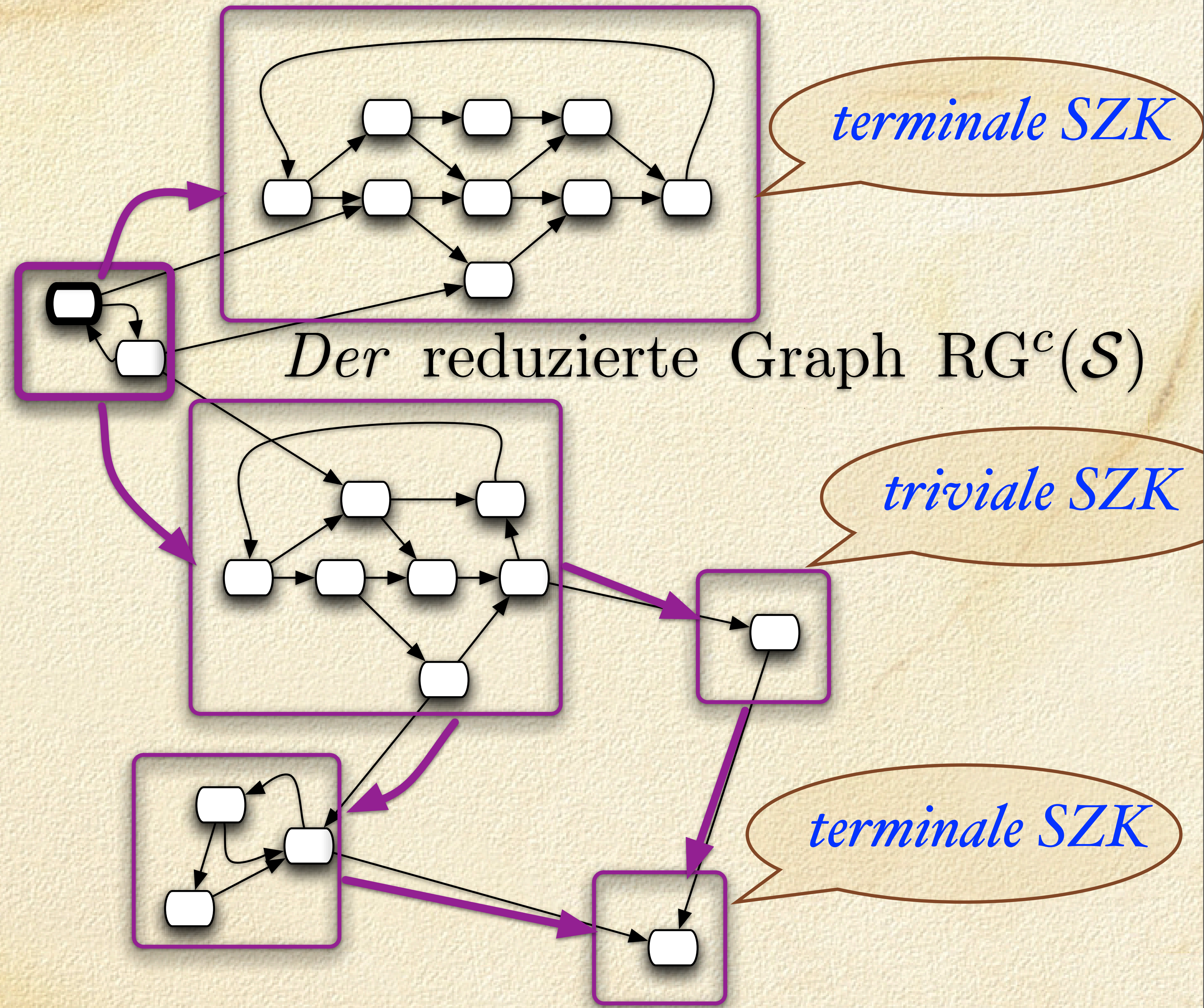
Beispiele dazu sind:

1) *Lebendigkeit von $t$* (liveness of $t$): $\forall \mathbf{m} \in \mathrm{RS}(\mathcal{S}) \,.\, \exists \mathbf{m}' \in \mathrm{RS}(\mathcal{N}, \mathbf{m}) \,.\, W(\bullet, t) \leq \mathbf{m}'$.

2) $\mathbf{m}_H$ ist *Rücksetzzustand* (home state): $\forall \mathbf{m} \in \mathrm{RS}(\mathcal{S}) \,.\, \exists \mathbf{m}' \in \mathrm{RS}(\mathcal{N}, \mathbf{m}) \,.\, \mathbf{m}' = \mathbf{m}_H$.

3) *Reversibilität* (reversibility): $\forall \mathbf{m} \in \mathrm{RS}(\mathcal{S}) \,.\, \exists \mathbf{m}' \in \mathrm{RS}(\mathcal{N}, \mathbf{m}) \,.\, \mathbf{m}' = \mathbf{m_0}$.

# strenge Zusammenhangskomponente (SZK)



## Algorithmus 3.3 (Entscheiden einer Lebendigkeits-Invarianzeigenschaft)

**Input -** Der Erreichbarkeitsgraph $\mathrm{RG}(\mathcal{N}, \mathbf{m_0})$. Die Lebendigkeits-Invarianzeigenschaft $\Pi$.
**Output -** TRUE falls die Eigenschaft $\Pi$ erfüllt ist; FALSE falls die Eigenschaft $\Pi$ nicht erfüllt ist.

1. Berechne die strengen Zusammenhangskomponenten (SZKs) $C_1, \ldots, C_r$ von $\mathrm{RG}(\mathcal{N}, \mathbf{m_0})$.
2. Berechne den Graphen $\mathrm{RG}^c(\mathcal{S}) = (V_c, E_c)$ durch Wandeln der SZKs $C_1, \ldots, C_r$ in jeweils einen Kno
   d.h. $V_c = \{C_1, \ldots, C_r\}$. $\langle C_i, t, C_j \rangle \in E_c$ genau dann, wenn eine Kante $\langle \mathbf{m}, t, \mathbf{m}' \rangle \in E$
   derart existiert, dass $\mathbf{m}$ in der SZK $C_i$ und $\mathbf{m}'$ in der SZK $C_j$ liegt und $i \neq j$ gilt.
3. Berechne die Menge F der terminalen SZKs von $\mathrm{RG}^c(\mathcal{S})$.
4. **while** es gibt $C_i \in F$ **do**
   4.1 **if** $C_i$ enthält keine Markierung $\mathbf{m}'$, die $\Pi$ erfüllt.
   **then** return FALSE
   4.2 Entferne $C_i$ aus $F$
5. Return TRUE